Cours de mathématiques M.P.S.I.

D'après les cours de M. De Granrut

Henriet Quentin
Ausseil Lucas
Perard Arsène
Philipp Maxime

Fonctions réelles de la variable réelle – Formules de Taylor

Théorème de Taylor avec reste intégral :

> Soient I un intervalle, $n\in\mathbb{N}$, $f\ :\ I\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, $(a,b)\in I^2$. On a alors :
> $$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^b\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\,dx$$

Preuve :

Intégration par parties : Pour $n=0$: $f(b)=f(a)+\int_a^b f'(x)\,dx$

si $n>0$:

$$\begin{array}{c|lcl}
+ & f'(x) & & 1\\
- & f''(x) & \searrow & -(b-x)\\
+ & f^{(3)}(x) & \searrow & (-1)^2\dfrac{(b-x)^2}{2}\\
\vdots & \vdots & \searrow & \vdots\\
(-1)^n & f^{(n+1)}(x) & \int & (-1)^n\dfrac{(b-x)^n}{n!}
\end{array}$$

D'où $f(b)=f(a)-\left[\sum_{k=1}^{n}f^{(k)}(x)\frac{(b-x)^k}{k!}\right]_a^b+\int_a^b\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\,dx$

$$f(b)=\underbrace{f(a)}_{k=0}+\sum_{k=1}^{n}f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!}+\int_a^b\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\,dx$$

Théorème : formule de Taylor-Lagrange :

> Soient I un intervalle, $n\in\mathbb{N}$, $f\ :\ I\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, $(a,b)\in I^2$. On a alors :
> $$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right|\leqslant\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}\right|.$$

Preuve :

$\left|f^{(n+1)}\right|$ est continue sur le segment $[a,b]$ donc elle est bornée $\Rightarrow$ $\exists M\in\mathbb{R}$ tel que $\sup_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}\right|=M$

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right|=\left|\int_a^b\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\,dx\right|$$

si $a\leqslant b$: $\leqslant\int_a^b\left|\frac{(b-x)^n}{n!}\right|\left|f^{(n+1)}(x)\right|dx\leqslant\int_a^b\left|\frac{(b-x)^n}{n!}\right|M\,dx=\left[-\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}M\right]_a^b=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}M=\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}M$

si $a>b$: $\leqslant\int_b^a\left|\frac{(x-b)^n}{n!}\right|\left|f^{(n+1)}(x)\right|dx\leqslant\int_b^a\left|\frac{(x-b)^n}{n!}\right|M\,dx=\left[+\frac{(x-b)^{n+1}}{n+1!}M\right]_b^a=\frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}M=\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}M$

Théorème : formule de Taylor-Young :

> Soient I un intervalle, $n\in\mathbb{N}$ $f\ :\ I\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n}$ sur I, $a\in I$. On a alors :
> $$\forall x\in I,\quad f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\underset{x\to a}{=}o((x-a)^n)\qquad\mathrm{DL}_n(a)\text{ de } f$$

Remarque :

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$

Taylor-Lagrange
$\forall x\in[a-\delta,a+\delta]$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right|}{|x-a|^n}\leqslant M\dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\underset{x\to a}{\to}0$

* * * * *